



Моделювання складних систем

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський) /</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>113 Прикладна математика</i>
Освітня програма	<i>ОНП Наука про дані та математичне моделювання</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>Очна (денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредитів ЕКТС, 150 год (46 годин лекції, 104 СРС)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен/ 2 контрольні роботи</i>
Розклад занять	<i>Тижневих годин : 1.5 год. - лекція</i>
Мова викладання	<i>Англійська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: асистент Мазурик Роман Володимирович r.mazuryk.ua@gmail.com</i>
Розміщення курсу	<i>немає</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Мета дисципліни «Моделювання складних систем» полягає в дослідженні та математичному моделюванні різноманітних матеріальних об'єктів. В дисципліні з єдиних позицій розглядається методологія і послідовність дій з моделювання механічних (будівельна механіка), електричних (електричні ланцюги), гідравлічних (розгалужені трубопровідні системи) систем. Оскільки в багатьох науках геометрична сторона невіддільна від фізичної, то описуються також принципи моделювання і геометричних систем з врахуванням можливої зміни їх положення. На прикладі розглянутих проблем студент чітко уявить що таке елемент і чим (якими визначальними параметрами) він характеризується; як математично описується поведінка (зміна стану чи положення) елемента, і як це відображається на поведінці (характеристиці) всієї системи. Студент навчиться: а) алгоритмам обходу складної розгалуженої системи – тобто скласти перелік невідомих та їх нумерацію; б) формулювати фізичні рівняння зв'язку між параметрами на початку елемента та на його кінці; в) скласти рівняння спряження для сусідніх країв різних елементів, в тому числі при наявності геометричних та фізичних розривів (наприклад, порушення геометричної неперервності, наявність додаткових зосереджених впливів на границі між ними) та розглядати розгалужені системи, коли в одній точці межують три і більше елементів; г) формулювати граничні умови для складних систем з багатьма зовнішніми краями;

д) формувати систему лінійних визначальних рівнянь та рішати її з можливістю представляти результати для кожної точки кожного елементу. Окрема увага приділяється побудові сплайнів, як систем криволінійних ділянок, на основі фізичних моделей деформування просторових криволінійних балок на жорстких, пружних і неперервних пружних опорах. Це дозволяє проводити неперервні (аж до другої, третьої чи четвертої похідної) криві для точок, що виміряні: а) точно; б) для далеко розміщених точок, що виміряні з похибкою; та в) для щільних масивів точок (великий розкид даних), що має велике застосування в статистиці та техніці. Можливо, вузькі спеціалісти в окремих галузях знань можуть краще усвідомлювати фізичні зв'язки і математичну суть елементу, але прикладний математик зможе побудувати комплексну модель всього об'єкту і правильно організувати її розрахунок і представлення результатів, саме в цьому його беззаперечна перевага як універсального спеціаліста в будь-якій галузі знань.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі компетентності та програмні результати навчання за освітньою програмою:

Фахові компетентності

ФК 01 - Здатність формалізувати та розв'язувати складні задачі й проблеми, які потребують оновлення й інтеграції знань, часто в умовах неповної, неточної чи недостатньої інформації та суперечливих вимог

ФК 02 - Здатність проводити наукові дослідження з розроблення нових та адаптації існуючих математичних та комп'ютерних моделей для дослідження різноманітних процесів, явищ і систем, проводити відповідні чисельні експерименти з аналізом одержаних результатів ФК 04 - Здатність розробляти методи побудови й дослідження моделей складних систем у різних галузях людської діяльності

Програмні результати навчання

ПРН 01 - Використовувати та адаптовувати математичні теорії та моделі для забезпечення теоретичного підґрунтя розв'язання наукових та практичних задач

ПРН 02 - Застосовувати існуючий математичний апарат, розробляти нові моделі, методи та алгоритми при вирішенні актуальних практичних задач широкого спектру

ПРН 08 - Здійснювати математичне і комп'ютерне моделювання складних систем та процесів, обчислювальні експерименти з використанням сучасних методів інтелектуального аналізу даних та комп'ютерних технологій

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Для успішного засвоєння курсу необхідно (Н) або доцільно (Д) засвоїти наступні курси.

(Н): - Алгебра і геометрія; Математичний аналіз; Програмування; Прикладна механіка;

Диференціальні рівняння; Функціональний аналіз;

(Д): Забезпечення якості ПЗ; Алгоритмічні основи обчислювальної геометрії та комп'ютерної графіки; Математичне моделювання; Алгоритми і системи комп'ютерної математики Результати курсу можуть мати значення і сприяти освоєнню наступних курсів:

Основи наукових досліджень та організації науки; Системна інженерія. Математичне моделювання біомедичних систем і процесів, Науково-дослідна практика».

3. Зміст навчальної дисципліни

РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Тема 1.1. Алгоритм рішення складної одномірної задачі

Тема 1.2. Узагальнений метод Крилова для системи звичайних диференціальних рівнянь

Тема 1.3. Розподіл фізичних параметрів в технічних системах

РОЗДІЛ 2. ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Тема 2.1. Геометрія лінії на площині.

Тема 2.2. Побудова складних фігур та траєкторій на площині

Тема 2.3. Геометрія лінії в просторі і поворот відносно довільної осі.

Тема 2.4. Деформування складної просторової геометричної системи

Тема 2.5. Рішення задач в 3D криволінійних координатах

РОЗДІЛ 3. ДЕФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ БАЛОК

Тема 3.1. Векторна постановка задач деформування балок

Тема 3.2. Елемент балки, що має форму частини круга

Тема 3.3. Задачі на власні форми. Втрата стійкості балки

Тема 3.4. Рівняння спряження для прямолінійних балок

Тема 3.5. Поворотні елементи для криволінійних балок, розгалужені системи

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ БАЛОК ДЛЯ ПОБУДОВИ СПЛАЙНІВ

Тема 4.1. Балкові коротаційні сплайни для інтерполяції точок

Тема 4.2 Згладжування похибок чи відхилень за допомогою балкових коротаційних сплайнів

Тема 4.3. Побудова неперервних до другого порядку замкнутих кривих

Навчальні матеріали та ресурси

Базова література до всього курсу

1. І.В. Ориняк. РОЗРАХУНКИ СКЛАДНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ.

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю 113 «Прикладна математика» Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022, 252 с. Точка доступу

https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/48744/1/Rozrakhunky_skladnykh_system

До розділу 1. Базова література

2. В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний, О. І. Михальов, А. В. Усов. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ. Підручник. Вінниця. ВНТУ. 2017.

http://ksu.vntu.edu.ua/index.php?option=com_content&view=article&id=59&Itemid=211&lang=uk

Допоміжна література

3. Richard Khoury, Douglas Wilhelm Harder. Numerical Methods and Modelling for Engineering. Springer

International Publishing, 2016, 332 p. DOI 10.1007/978-3-319-21176-3

Даються загальні методи рішення складних систем

До розділу 2. Базова література

4. Ю. В. Міхлін Н. О. Кириллова І. О. Морачковська. Елементи диференціальної геометрії. Навчальний посібник, Рекомендовано редакційно-видавничою радою Національного технічного університету «ХПІ», протокол № 2 від 17.05.19. р, 43 стр. Точка доступу:

http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPI-Press/54388/1/Book_2020_Mikhlin_Elementy.pdf

5. І Гуран, О. Гутік, о, Лисецька, Т. Мокрицький. Диференціальна геометрія: Теорія кривих та поверхностей. Львів, 2021, точка доступу

<http://prima.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/Departments/Topology/Gutik.files/DyfGeom.pdf>

До розділу 3. Базова література

6. Баженів В. А., Перельмутер А. В., Шишов А. В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології.

Київ: Каравела. 2012, 695 стр. .

7. Павловський М.А. Теоретична механіка. Київ.: Техніка. 2002

До розділу 4. Базова література

7. Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал, Ю.Є.Вакал. Сплайн-функції і їх застосування. Навчальний посібник. Київський національний університет ім. Тараса Шевченка. Київ, 2016, 118 с. Точка

доступу: http://www.matfiz.univ.kiev.ua/uploads/books/spline_ml.pdf

Допоміжна література

8. Sung Joon Ahn. Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space. Springer, Berlin, 2004, 125 p. doi: 10.1007/b104017

Навчальний контент Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

5.1. Лекції

Перший розділ є загальним і визначає загальні підходи до рішення практичних задач, та проблеми які можуть виникнути. Розділ дає загальні уявлення до формалізації та алгоритмізації рішення задач методом початкових параметрів. Розглядаються підходи до аналізу складних, практично необмежених по кількості змінних, задач на основі розгляду проблем електричних систем, а також пневматичних та гідравлічних контурів.

Другий розділ в основному присвячений побудові та деформації плоских та просторових кривих. Розглядаються задачі побудови траєкторій, що мають певні властивості неперервної зміни кривизни.

Третій розділ присвячений розв'язку складних систем з великою кількістю невідомих на прикладі задач будівельної механіки. Розглядається загальна постановка задач просторового деформування.

Четвертий розділ присвячений використанні модифікованої теорії балок для побудови сплайнів, як для точок визначених точно, так і для точок, що отримуються наближено.

Частина 1. Основи розрахунку складних систем

Лекція 1. Алгоритм рішення складної одновимірної задачі методом початкових параметрів

Елемент системи, рівняння зв'язку; Об'єднання двох суміжних елементів, рівняння спряження. Вузли між елементами та границі системи. Формулювання ненульових граничних умов. Складання системи рівнянь. Рішення нелінійних систем, як сума базового і поправочного рішень

Лекція 2. Узагальнений метод Кривого рішення системи лінійних диференціальних рівнянь як основа застосування МПП

Найпростіша СЛДР 2-го порядку. Рішення Кривого для балки на пружній основі. Частинне рішення, коли права частина містить власні функції. Система двох взаємозв'язаних параметрів. Лінеаризація і приклад рішення системи нелінійних диференціальних рівнянь

Лекція 3. Розподіл струмів і напруги в електричних схемах

Базові фізичні поняття, один провідник. Послідовне з'єднання, два провідники. Розгалуження (вузол). Джерело напруги та загальний алгоритм. Приклад складної системи

Лекція 4. Розподіл тисків та потоків в рідинних системах

Основні початкові рівняння. Статичне (усталений рух) рівняння для рідини. Рішення для рідинних трубопроводних систем. Приклад розрахунку гідравлічної системи

Лекція 5. Газові трубопровідні системи

Основні рівняння. Витік газу із малого отвору в резервуарі. Алгоритм розрахунку складної газопровідної системи. Приклад розрахунку газопровідної системи

Частина 2. Аналітична геометрія лінії та векторні диференційні рівняння в криволінійних координатах Лекція 6-7. Геометрія лінії на площині

Рівняння кола. Залежності для лінії заданої параметрично. Похідна від нормального вектору. Лінія, що незначно відхиляється від прямої. Незначні відхилення вимірів положення реальної лінії. Визначення лінії по зміні її кривизни, клотоїда. Повороти та переміщення кривої як цілої (твердого тіла). Приклад побудови ділянки дороги.

Лекція 8. Побудова складних фігур та траєкторій на площині

Постановка проблеми. Положення довільної точки кола при зміні положення першої точки. Аналіз геометричної системи методом початкових параметрів. Приклад теплового розширення спіралі Архімеда.

Лекція 9-10. Гвинтова лінія, геометрія лінії в просторі, поворот відносно довільної осі

Локальні базисні вектори гвинтової лінії (хелікса). Базисні вектори довільної просторової лінії. Переміщення і повороти в просторі. Приклади неадитивності поворотів. Малі повороти в механіці деформівного твердого тіла. Системи базисних векторів

Лекція 11. 3D геометричний елемент, деформування складної просторової системи

Постановка задачі. Розклад базисних векторів хелікса через початкові вектори. Визначення положення довільної точки хелікса через початкову. Деформування елементу, складна просторова геометрична система. Приклад розрахунку неперервного деформування хеліксу

Лекція 12. Узагальнений метод Крилова для векторних диференційних рівнянь

Векторні диференційні рівняння для плоских задач на колі. Інтегрування векторної функції на колі. Постановка диференційних рівнянь в хеліксних координатах. Рішення однорідної системи для хелікса. Нульове частинне рішення для хелікса для постійних компонент навантаження. Частинне рішення для поліноміального векторного навантаження. Частинне рішення для гармонійного векторного навантаження.

Частина 3. Деформування просторових балок Лекція 13-14. Векторна постановка задач деформування балок

Пряма балка (стержень) на розтяг та кручення. Згин прямої балки. Векторне представлення визначальних рівнянь для балки. Приклад рішення задачі згину для прямої балки з багатьма опорами. Отримання хелікса деформуванням початково прямої балки. Деформування пружини при розтязі.

Лекція 15. Елемент балки, що має форму частини круга

Формулювання визначальних диференційних рівнянь. Рішення для деформації в площині кругової балки МПП. Проблеми і перевірка точності рішення для кругової балки. Майже кругова балка під внутрішнім тиском

Лекція 16. Втрата стійкості балки

Формулювання задачі. Отримання визначальних рівнянь та їх загальне рішення. Деякі приклади аналізу втрати стійкості. Неоднорідні задачі на поздовжньо поперечний згин. Приклад рішення поздовжньо поперечного згину.

Лекція 17. Рівняння спряження для прямолінійних балок

Роль рівнянь спряження в теорії балок. Спряження для прямої балки без проміжних опор. Спряження для прямої балки з проміжною опорою. Взаємодія труби з рідиною.

Лекція 18-19. Поворотні елементи для криволінійних балок, розгалуження балкової системи

3D балка, що містить прямі елементи з'єднані під прямими кутами. Приклад балки, елементи якої направлені по глобальним осям. Поворотні елементи для балки, що має

форму хелікса. Поворотні елементи для кругової балки. Поворотні елементи для криволінійної труби з внутрішнім тиском. Розгалуження балкової системи.

Частина 4. Застосування теорії балок для побудови сплайнів

Лекція 20-21. Енергетичні сплайни – точна відповідність

Звичайне і оптимізоване рішення МПП. Класична теорія кубічних сплайнів, метод трьох моментів. Апроксимація «розтягнутими» чи «стиснутими» балками. Застосування локальних координат для відрізків. Приклад. Балка на трьох опорах.

Лекція 22. Згладжування похибок чи відхилень

Проблема згладжування. Балка на дискретних пружних опорах. Балка на неперервних пружних опорах.

Лекція 23. Побудова двічі диференційованих плоских замкнутих кривих по неточним дискретним даним

Постановка задачі і аналіз літератури. Основні рівняння, локальний базис. Основна ідея алгоритму. Постпроцесорні обчислення і уточнення геометрії. Приклади розрахунку для складних фігур.

Самостійна робота студента

Теми курсу сформульовані так, щоб у студента виникло бажання глибше ознайомитися з темою і дослідити наукову чи методичну літературу. Всі консультації надаються викладачем практично без обмежень. Єдина вимога, щоб студент чітко прив'язував свої питання до конспекту лекцій, вказуючи які саме моменти їм не зрозумілі. Абсолютно не сприймається, коли студент, нічого не прочитавши, просить пояснити йому методологію і кроки рішення задачі. При узгодженні часу і можливостей викладач може відкривати додаткові консультації в ЗУМ.

№ з/п	Вид самостійної роботи	Кількість годин СРС
1.	Виконання практичних завдань. Ознайомлення з тематичною літературою	39
2.	Підготовка до лекцій	15
3.	Вивчення термінології англійською	10
4.	Опрацювання лекційного матеріалу	25
5.	Підготовка до екзамену	15
	Загалом	104

Політика та контроль Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Зазначається система вимог, які викладач ставить перед студентом/аспірантом:

- Неможливо оволодіти курсом лише з лекцій, тому через ЗУМ надається велика кількість додаткових консультацій. Спеціальних вимог щодо присутності на лекціях немає, бо є контрольні роботи, екзамен. Успішне виконання курсового проекту є свідченням кваліфікації
- Спеціальних вимог щодо на заняттях немає, якщо все в межах пристойності. Звичайно, заохочується активність, підготовка додаткових повідомлень, тощо. В кінці (останній місяць) студенти активно залучаються до навчального (себе і одногрупників) процесу шляхом проведення активного захисту і демонстрації результатів виконання курсового проекту. Осільки завдання індивідуальні, то результати є цікавими і пізнавальними для інших. Враховується активність як демонстрантів, так і слухачів

- *Лабораторні роботи оформляються як наукові роботи з постановкою задачі, рішенням, висновками і оформлюються наглядно, повно, логічно і красиво. Такі вимоги до оформлення. Дозволяється здавати необмежене число раз, викладач ставить питання (або усно, при явному навчанні, або письмово в тексті лабораторної – при карантинному навчанні), які вимагають відповіді. Починаючи з певного рівня (60 відносних балів) студенту дається вибір: або покращати роботу (є дуже конкретні зауваження викладача) або отримати запропоновану оцінку.*

Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

1. Робота на лекційних заняттях

Викладач має право заохотити студента певною додатковою кількістю балів (максимально – 4 бали за семестр) за надання оригінального рішення, відповіді чи питання на практичних заняттях. За одне заняття студент не може отримати більше, ніж 1 бал.

2. Модульний контроль

Максимальна кількість балів за двогодинну МКР дорівнює:

$$25 \text{ балів} \times 2 = \mathbf{50 \text{ балів.}}$$

Кожне завдання контрольної роботи оцінюється (в залежності від його складності) до 10 балів.

Максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він навів повний та правильний розв'язок задачі або припустився незначних арифметичних помилок/описок, які не вплинули суттєво на розв'язок.

Меншу ніж максимальну кількість балів (як правило, половину від цієї максимальної кількості) студент отримує у випадку, коли наведений ним розв'язок є правильним, проте неповним (задача не розв'язана до кінця), або хід розв'язку є правильним та повним, проте студент припустився помилок, які суттєво вплинули на відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли задача взагалі не розв'язана, або наведений хід розв'язку містить грубі помилки, або наведено тільки відповідь на задачу.

3. Відповідь на екзамені Ваговий бал – **50**.

Форма проведення екзамену залежить від того – буде він відбуватися у традиційному (очному) режимі чи у дистанційному:

Очна форма	Дистанційна форма
На екзамені студент отримує білет з двома теоретичними та двома практичними завданнями.	На екзамені студент отримує білет з одним теоретичним та двома практичними завданнями.
За відповіді на кожне з теоретичних чи практичних завдань нараховується максимум 10 балів. На вказані завдання студент надає письмову відповідь, яку викладач перевіряє у день проведення екзамену. За відповідь на кожне запитання білету студент отримує: – 8-10 балів, якщо він надав повну та правильну відповідь або припустився незначних похибок, які істотно не вплинули на саму відповідь, – 5-7 балів, якщо відповідь правильна лише частково або не є повною (наприклад, наведена лише схема необхідного доведення теореми або під час розв’язання прикладу не перевірена можливість застосування відповідного методу), – 2-4 бали, якщо відповідь частково правильна, але містить значні прогалини (наприклад, відсутнє необхідне доведення теореми чи під час розв’язання прикладу враховані не всі можливі випадки), – 0-1 бали, якщо відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Для встановлення степені знання студентом матеріалу дисципліни після перевірки письмової відповіді викладач додатково задає студенту одне чи декілька нових запитань – на уточнення наданої відповіді або, взагалі, на іншу тему з матеріалу, що перевіряється.	
Відповіді на сукупність додаткових запитань оцінюються загалом від 0 до 10 балів в залежності від їх точності та повноти за тим же принципом, що і відповіді на письмові завдання.	Відповіді на сукупність додаткових запитань оцінюються загалом від 0 до 20 балів в залежності від їх точності та повноти за тим же принципом, що і відповіді на письмові завдання.
Викладач має право заохотити студента певною кількістю балів (максимально – 3 бали) за надання оригінального рішення чи відповіді на екзамені.	

6. Заохочувальні бали за:

- виступ на лекції (за попередньою домовленістю з лектором) із доповіддю по матеріалам навчального курсу (або близьким до них), надається до 5-х заохочувальних балів;
- активність на лекціях, тобто за
 - відповіді на запитання лектора до загальної аудиторії,
 - знаходження описок/помилочок у лекціях,
 - задавання «правильних запитань», тобто запитань, які свідчать про вдумливу роботу студента з навчальним матеріалом
 нараховується загалом до 3-х заохочувальних балів.

Розрахунок шкали (R) рейтингу:

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру складає:

$R_C = 8 + 14 \cdot 3 = 50$ балів. Із цієї суми за семестр студент може набрати певну кількість балів r_C .

Екзаменаційна складова (R_E) шкали дорівнює 50 балам, тобто складає 50% від R .

За відповідь на екзамені студент може набрати певну кількість балів r_E .

Рейтингова шкала з дисципліни складає $R = R_C + R_E = 100$ балів.

Сумарна кількість заохочувальних балів (rs) за роботу студента з дисципліни під час семестру (див. п. 1 та п. 6) не повинна перевищувати $0,1 \times R_C$, тобто $0,1 \times 50$ балів = 5 балів.

Необхідною умовою допуску до екзамену є виконання як мінімум, двох розрахункових робіт.

Студенти, які допущені до екзамену, отримують свою попередню оцінку з дисципліни (R_D) автоматично.

Вона повідомляється студентам на консультації перед екзаменом і розраховується таким чином:

$$R_D = 2 * (r_C + r_S).$$

Якщо навчання відбувалося у дистанційному режимі й студент погоджується із попередньою оцінкою, то вона стає остаточною та виставляється у екзаменаційну відомість.

Якщо навчання відбувалося у дистанційному режимі й студент не згоден із попередньою оцінкою, яку він отримав «автоматом», то він здає екзамен за наведеними раніше правилами, а його остаточна рейтингова оцінка R_D розраховується за формулою: $R_D = r_C + r_S + r_E$.

Якщо навчання відбувалося у очному режимі, то оцінка за екзамен автоматично не виставляється, а студенти здають екзамен у традиційному форматі за наведеними раніше правилами, при цьому остаточна рейтингова оцінка R_D студента розраховується за формулою: $R_D = r_C + r_S + r_E$.

Для отримання відповідних оцінок рейтингова оцінка студента R_D переводиться згідно з такою таблицею:

Межі переведення рейтингових оцінок	R_D	Оцінка
$R_D \geq 0,95R$	≥ 90	відмінно
$0,85R \leq R_D < 0,95R$	85 .. 94,5	дуже добре
$0,75R \leq R_D < 0,85R$	75 .. 84,5	добре
$0,65R \leq R_D < 0,75R$	65 .. 74,5	задовільно
$0,6R \leq R_D < 0,65R$	60 .. 64,5	достатньо
$R_D < 0,6R$	< 60	незадовільно
Контрольні роботи не здано		не допущено

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено *асистент, д.ф. Мазурик Роман Володимирович*

Ухвалено кафедрою прикладної математики (протокол №14 від 14.05.2025.)

Погоджено Методичною комісією факультету прикладної математики (№11 від 23.05.2025)